XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

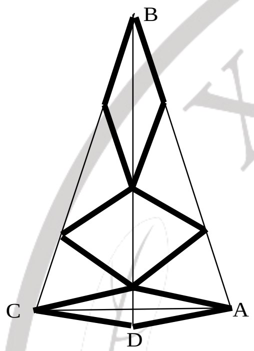
Gyula, 2009. március 12-16.

9. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2009}$ egyenletet?

Kántor Sándor (Debrecen)

2. feladat:



Az *ABCD* deltoidban az *A* és *C* csúcsnál derékszög van, és a *BD* átló 12 cm. Az ábra szerint a deltoidba három azonos oldalhosszúságú rombusz írható. Mekkora a deltoid *B* és *D* csúcsánál levő szöge és az *AC* átló hossza?

Katz Sándor (Bonyhád)

3. feladat: Adjuk meg az összes olyan *n* természetes számot, amelyre $2^8+2^{11}+2^n$ négyzetszám!

Eigel Ernő (Gyula)

4. feladat: Oldjuk meg az

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}+\ldots+\frac{2009x}{(x+1)(2x+1)\ldots(2009x+1)}>1$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Balázsi Borbála (Beregszász)

5. feladat: Húsz személy mindegyike a húszból tíz másiknak küld levelet. Van-e két olyan személy, akik között volt levélváltás?

Szabó Magdolna (Szabadka)

6. feladat: Az *ABCD* téglalap *DC* oldala, mint átmérő fölé (átmérőre) kört rajzolunk. Húzzunk a körhöz a téglalap *A* csúcsából az *AD* egyenesétől különböző érintőt, az érintési pont legyen *E*. A téglalap *BC* oldalegyenesét az *AE* egyenes a *G* pontban, a *DE* egyenes a *H* pontban metszi.

a.) Bizonyítsuk be, hogy az *EGH* háromszög egyenlő szárú!
b.) Mekkora a téglalap oldalainak aránya, ha az *EGH* háromszög szabályos?
c.) Bizonyítsuk be, hogy ha az *EGH* háromszög szabályos, akkor a kör *F* középpontja, az *E* érintési pont és a téglalap *B* csúcsa egy egyenesen van!

Nemecskó István (Budapest)

XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

10. osztály

1. feladat: Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamosan egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. A keletkezett háromszögek területeit jelöljük t_1, t_2 és t_3-mal és az eredeti háromszög területét pedig T-vel.

Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{T} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$!

Oláh György (Komárom)

2. feladat: Az f függvény értelmezési tartománya a 0-tól különböző valós számok halmaza. Az értelmezési tartomány minden x elemére teljesül az $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ összefüggés. Mely x valós számokra áll fenn az $f(x)=f(-x)$ egyenlőség?

Kántor Sándorné (Debrecen)

3. feladat: Legyen $p \geq 3$ egy adott prímszám. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^{2009}$$

egyenletet!

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+3} = \dfrac{9}{13} \end{cases}$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

5. feladat. Jelölje H az ABC háromszög magasságpontját, O pedig a köré írt körének középpontját. Az A csúcsból a BC egyenesre bocsájtott merőleges talppontja rajta van az AC oldal felező merőlegesén. Határozzuk meg a $\frac{CH}{BO}$ arányt!

R. Sipos Elvira (Zenta)

6. feladat. Legalább hány számot kell kihúznunk az 1, 2, 3, … , 2009 számok közül ahhoz, hogy a megmaradó számok egyike se legyen két másik, tőle különböző megmaradó szám szorzata?

Katz Sándor (Bonyhád)

XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

11. osztály

1. feladat: Állítsuk öt párba az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat úgy, hogy a párokban lévő számok különbségeinek abszolút értékei rendre 1, 2, 3, 4, 5-t adjanak!
Megtehető-e ez a párosítás (természetesen hat párba), ha az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számokkal dolgozunk, úgy hogy ezek a különbségek 1, 2, 3, 4, 5, 6 legyenek? Indokoljuk a választ!

Hajnal Péter (Szeged)

2. feladat: Létezik-e két olyan egymástól különböző, pozitív racionális szám, amelyeknek számtani, mértani és harmonikus közepe egy derékszögű háromszög oldalhosszai?

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

3. feladat: Egy osztály minden tanulója vagy úszik, vagy kosarazik, esetleg mindkettőt csinálja.
Lehetséges-e, hogy az osztályban több a lány, mint a fiú a következő esetekben:

a) ha az úszóknak és a kosarasoknak is 60 %-a fiú?
b) ha az úszók 60 %-a és a kosarasok 75 %-a fiú ?

Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat: Legyen *ABCD* egy olyan téglalap, amelybe szabályos háromszög írható úgy, hogy a háromszög egyik csúcsa az *A* pont, a másik kettő pedig a téglalap egy-egy olyan oldalán fekszik, amelyen az *A* pont nincs rajta. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a téglalapból a szabályos háromszög által lemetszett háromszögek egyikének a területe a két másik lemetszett háromszög területének összegével egyenlő!

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a $3^k + 3^n$ alakban felírt négyzetszámokból végtelen sok van, ahol *k* és *n* különböző pozitív egész számok! Mi a helyzet, ha a 3 helyett a 4, az 5, a 6 és a 7 számokat írjuk?

Kántor Sándor (Debrecen)

6. feladat: Adott háromszögbe szerkesztettünk két egybevágó, közös belső pont nélküli, maximális sugarú kört. Mekkora ez a sugár? Hogyan történhet a szerkesztés?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

12. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós számra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

$$-\frac{5}{4} \leq \sin x + \cos x + \sin 2x \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

2. feladat: 2009 számjegyei három „köz"-t határoznak meg: 2_0_0_9. A számon a következő átalakítást végezzük: kiválasztunk egy tetszőleges 10-es számrendszerbeli számjegyet, az első közbe beírjuk, a második közbe kétszer írjuk be, a harmadik közbe háromszor. Így egy következő számhoz jutunk. Ez persze hosszabb és így számjegyei több közt határoznak meg. Újból elvégezzük a fenti átalakítást: újból választunk egy számjegyet és a közökbe ezt írjuk (az i-edik közbe i darabot). Ezt az eljárást folytatjuk. Igazoljuk, hogy eljárásunk során soha sem kaphatunk 3-mal osztható számot.

Bíró Bálint (Eger)

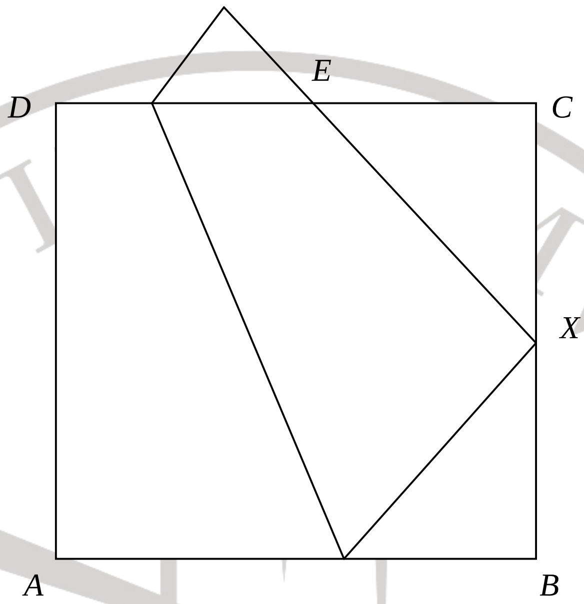
3. feladat: Jelölje AC és BD az egység sugarú kör két merőleges átmérőjét.Az AB, BC, CD és DA negyedköríveken felvesszük a P, Q, R és T pontokat úgy, hogy $APBQCRDT$ egy konvex nyolcszög lesz. Hogyan válasszuk meg a P, Q, R, T pontokat ahhoz, hogy a kialakított nyolcszög oldalainak négyzetösszege minimális legyen.

Bíró Bálint (Eger)

4. feladat: Az a_1, a_2, a_3, a_4,…, a_{101}, a_{102} az 1, 2, 3, 4,…, 101, 102 számok egy tetszőleges sorbaállítása. Igazoljuk, hogy az a_1+1, a_2+2, a_3+3, a_4+4,…, a_{101}+101, a_{102}+102 számok közt lesz két olyan, amelyek 102-vel osztva azonos maradékot adnak!

Balázsi Borbála (Beregszász)

5. feladat: Egy *ABCD* négyzet alakú papír *A* csúcsát a *BC* oldal egy *X* belső pontjához mozgatjuk és a papírlapot behajtjuk. A behajtott *AD* oldal az ábrán látható módon a *C* csúcsnál levág egy *XEC* háromszöget. Hogyan válasszuk meg az *X* pontot ahhoz, hogy a levágott háromszög beírt körének sugara a lehető legnagyobb legyen?



Egyed László (Baja)

6. feladat: Egy *n* elemű halmaz három elemű részhalmazaiból kiválasztunk néhányat úgy, hogy semelyik három ne tartalmazzon egynél több közös elemet. Igazoljuk, hogy a kiválasztott hármasok száma nem haladhatja meg $\frac{n(n-1)}{3}$ -at!

Róka Sándor (Nyíregyháza)