XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

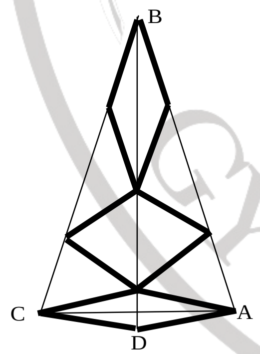
9. osztály

1. feladat: Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2009}$ egyenletet?

Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Megoldásként nyilván csak 2009-nél nagyobb egész számok jöhetnek szóba. Az egyenlet ekvivalens az $(x-2009)(y-2009)=2009^2$ egyenlettel. Annyi megoldás van, amennyi tényezője van 2009^2-nek, mert ezeket a tényezőket (x – 2009)-cel azonosítva x-et megkapjuk, és ehhez y egyértelmű. Mivel $2009 = 7^2 \cdot 41$, azaz $2009^2 = 7^4 \cdot 41^2$, ezért 2009^2 pozitív osztóinak a száma (4 + 1) (2 + 1) = 15.
Tehát az egyenlet keresett megoldásainak száma 15, amelyekhez az x értékét az előbbiek szerint az
$x-2009=1; 7; 7^2; 7^3; 7^4; 41; 41^2; 7\cdot 41; \cdot 7^2\cdot 41; 7^3\cdot 41; 7^4\cdot 41; 7\cdot 41^2; 7^2\cdot 41^2; 7^3\cdot 41^2; 7^4\cdot 41^2$,
egyenlőségekből ,az x-hez tartozó y párt rendre az .
$y-2009=7^4\cdot 41^2; 7^3\cdot 41^2; 7^2\cdot 41^2; 7\cdot 41^2; 7^4\cdot 41;\ 7^3\cdot 41; \cdot 7^2\cdot 41; 7\cdot 41; 41^2; 41; 7^4; 7^3; 7^2; 7; 1$
osztópárok egyenlőségeiből kapjuk.

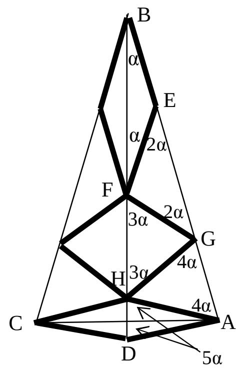
2. feladat:



Az *ABCD* deltoidban az *A* és *C* csúcsnál derékszög van, és a *BD* átló 12 cm. Az ábra szerint a deltoidba három azonos oldalhosszúságú rombusz írható. Mekkora a deltoid *B* és *D* csúcsánál levő szöge és az *AC* átló hossza?

Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás:



Legyen $DBA\sphericalangle=\alpha$.

Sorban a *BEF, EFG, FGH, HAD* egyenlő szárú háromszögekben a szögeket, ill. a *BEF, BFG, BGH, BHA* háromszögekben a külső szögeket kiszámolva a $BDA\sphericalangle=5\alpha$ értékig jutunk.
Innen $\alpha+5\alpha=90^\circ$, azaz $\alpha=15^\circ$.
Tudjuk, hogy a 15º-os szöggel rendelkező (*ABD*) derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogó negyede, ezért *AC*= 6 cm. *A* deltoid *B* és *D* csúcsnál levő két szöge 30º és 150º.

3. feladat: Adjuk meg az összes olyan *n* természetes számot, amelyre $2^8+2^{11}+2^n$ négyzetszám!

Eigel Ernő (Gyula)

Megoldás: Mivel

$$2^{11}+2^8=2^8\left(2^3+1\right)=48^2,$$

akkor $2^n+48^2=k^2$ (a keresett négyzetszám). Így $2^n=(k-48)(k+48)$, tehát a $k-48$ és a $k+48$ is 2-nek valamilyen egész kitevős hatványa kell legyen, vagyis $k-48=2^p, k+48=2^q$. Egymásból kivonva, $(p<q), 2^q-2^p=96=2^5\cdot3,$ azaz $2^p\cdot\left(2^{q-p}-1\right)=2^5\cdot3,$ vagyis ha $p=5$, akkor $2^{q-5}=2^2$, vagyis $q=7$, tehát $2^n=2^{p+q}=2^{12}\Rightarrow n=12$. Tehát $n=12$ a keresett természetes szám.

4. feladat: Oldjuk meg az

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}+\ldots+\frac{2009x}{(x+1)(2x+1)\ldots(2009x+1)}>1$$

egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

Balázsi Borbála (Beregszász)

Megoldás. Mivel

$$\frac{kx}{(x+1)(2x+1)\ldots(kx+1)}=\frac{(kx+1)-1}{(x+1)(2x+1)\ldots(kx+1)}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots((k-1)x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots(kx+1)},$$

ezért az egyenlőtlenség bal oldala:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}+\ldots+\frac{2009x}{(x+1)(2x+1)\ldots(2009x+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)}+\frac{1}{(x+1)(2x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(2008x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(2009x+1)}=1-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(2009x+1)},$$

azaz az $\frac{1}{(x+1)(2x+1)\dots(2009x+1)}<0$ egyenlőtlenséget kell megoldani. A megoldás:

$$(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{5}\right)\cup\dots\cup\left(-\frac{1}{2008};-\frac{1}{2009}\right).$$

5. feladat: Húsz személy mindegyike a húszból tíz másiknak küld levelet. Van-e két olyan személy, akik között volt levélváltás?

Szabó Magdolna (Szabadka)

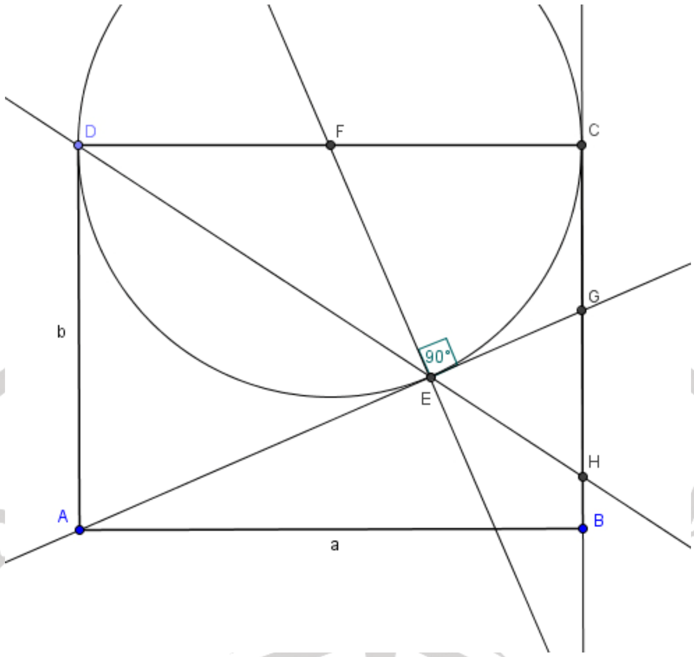
Megoldás: A csoportban **van** olyan személy, aki legalább 10 levelet kapott, mert ellenkező esetben legfeljebb $9 \cdot 20 = 180$ elküldött levél lenne, amely kevesebb 200-nál, az összes elküldött levelek számánál! Ez a személy levelet küldött a többi 19 személy közül 10-nek. Ha csak attól a 9-től kapott volna levelet, akinek ő nem küldött, akkor csak 9 levelet kapott volna, pedig legalább 10-et kapott, tehát kellett, hogy olyantól is kapjon, akinek ő küldött, azaz volt levélváltás.

6. feladat: : Az *ABCD* téglalap *DC* oldala, mint átmérő fölé (átmérőre) kört rajzolunk. Húzzunk a körhöz a téglalap *A* csúcsából az *AD* egyenesétől különböző érintőt, az érintési pont legyen *E*. A téglalap *BC* oldalegyenesét az *AE* egyenes a *G* pontban, a *DE* egyenes a *H* pontban metszi.

a.) Bizonyítsuk be, hogy az *EGH* háromszög egyenlő szárú!
b.) Mekkora a téglalap oldalainak aránya, ha az *EGH* háromszög szabályos?
c.) Bizonyítsuk be, hogy ha az *EGH* háromszög szabályos, akkor a kör *F* középpontja, az *E* érintési pont és a téglalap *B* csúcsa egy egyenesen van!

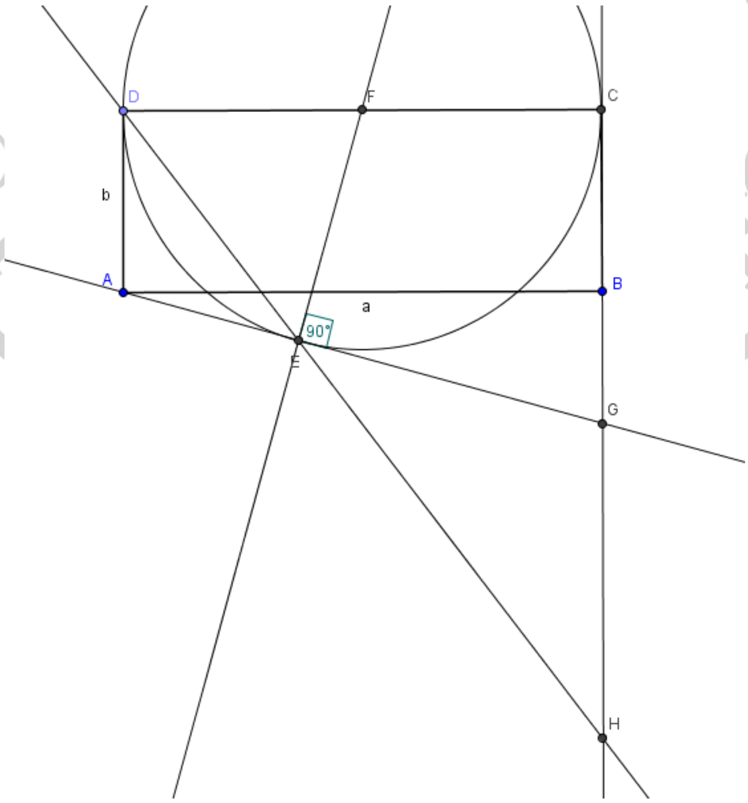
Nemecskó István (Budapest)

Megoldás:

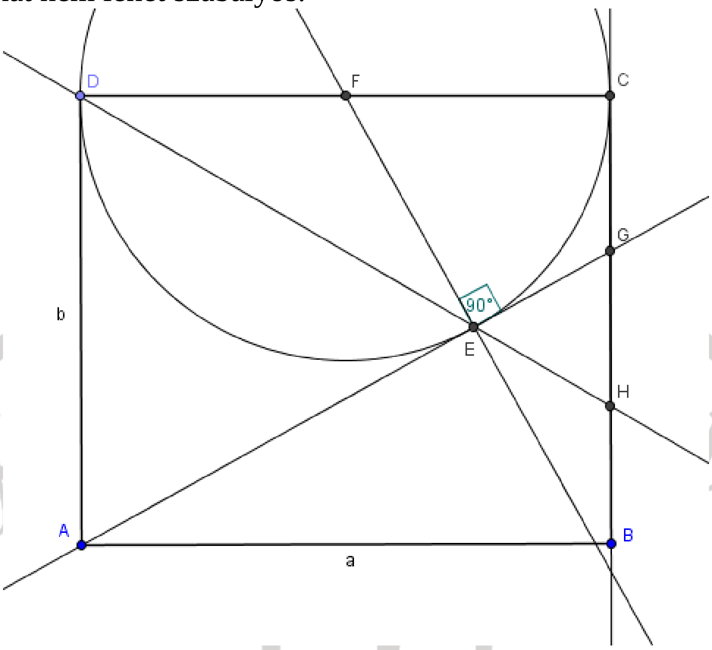


a.) Legyen az *EDF* ∠=α . Mivel a *DFE* háromszög egyenlő szárú, ezért *DEF* ∠=α. Így *GEH* ∠=90° -α és mivel *DHC* derékszögű háromszög *CHE* ∠=90° -α. Tehát az *EGH* háromszög egyenlő szárú.

Ha a téglalap *b* oldala kisebb vagy ugyanakkora, mint *a*/2, tehát a körvonal metszi vagy érinti *AB* oldalt, akkor is teljesül az állítás. Részletezzük a metszés esetét; az állítás ugyanazokkal a lépésekkel leolvasható az ábráról.



b.) Elég a $b > \frac{a}{2}$ esetet nézni, mert ellenkező esetben az $EHG\Delta$ derékszögű vagy tompaszögű, tehát nem lehet szabályos.



Ha az *EGH* háromszög szabályos, akkor minden szöge 60°-os, tehát *GHE* =60° így *HDF* $\angle$=30°. Ekkor az *AED* háromszögnek is minden szöge 60°, tehát szabályos háromszög, így *E* pont rajta van a téglalap *AB* oldalával párhuzamos szimmetriatengelyén. Legyen az *EGH* szabályos háromszög oldalainak hossza *x*. Az *FEGC* négyszög deltoid, tehát *GC=x*, a szimmetria miatt *BH=x* is teljesül. Így a téglalap *b* oldala az *EGH* háromszög oldalának háromszorosa (*b=3x*).

A *DHC* háromszög szögei 30°, 60° ill. 90˚-osak, befogói *a* és *2x*. Tudjuk, hogy az ilyen derékszögű háromszögek befogóinak aránya $\sqrt{3}$, tehát $\frac{a}{2x} = \sqrt{3}$, vagyis a keresett arány: $\frac{a}{b} = \frac{a}{3x} = \frac{a}{2x} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

c.) A *BGE* háromszög egyik szöge (*EGH*$\angle$) 60°-os és a közrezárt oldalak *x* és *2x*, tehát ez egy derékszögű háromszög. Vagyis *BE* merőleges az *AG*-re, de *FE* sugár és *AG* érintő, tehát *FE* is merőleges *AG*-re. Ezzel beláttuk, hogy *F*, *E* és *B* egy egyenesbe esik.

10. osztály

1. feladat: Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamosan egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. A keletkezett háromszögek területeit jelöljük t_1, t_2 és t_3-mal és az eredeti háromszög területét pedig T-vel.
Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{T} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$!

Oláh György (Komárom)

Megoldás. Legegyszerűbben úgy jutunk célhoz, ha felhasználjuk azt az ismert tételt, mely szerint hasonló háromszögek területeinek négyzetgyökei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak. Jelölje a_1, a_2, a_3 egy kiszemelt oldalból a megfelelő egyenesekkel kimetszett szakaszok hosszát. Ekkor

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{T} = a_1 : (a_1 + a_2 + a_3)$$
$$\sqrt{t_2} : \sqrt{T} = a_2 : (a_1 + a_2 + a_3)$$
$$\sqrt{t_3} : \sqrt{T} = a_3 : (a_1 + a_2 + a_3)$$

Összeadva:

$$\frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{T}} + \frac{\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1,$$

ahonnan

$$\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T} .$$

2. feladat: Az f függvény értelmezési tartománya a 0-tól különböző valós számok halmaza. Az értelmezési tartomány minden x elemére teljesül az $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ összefüggés. Mely x valós számokra áll fenn az $f(x)=f(-x)$ egyenlőség?

Kántor Sándorné (Debrecen)

Megoldás: Helyettesítsünk x helyére $1/x$-et! Ekkor $f(1/x) = 3\cdot 1/x - 2f(x)$.
Visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$f(x) + 2\,(3/x - 2f(x)) = 3x,$$

amiből $- 3f(x) + 6/x = 3x$, azaz

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{x},\ f(-x) = \frac{x^2 - 2}{x}.$$

A $\frac{2-x^2}{x}=\frac{x^2-2}{x}$ egyenlet megoldásai x $=\pm\sqrt{2}$, amik valóban megoldások, és ebben az esetben fennáll az $f(x)$ = $f(-x)$ egyenlőség.

3. feladat: Legyen $p \geq 3$ egy adott prímszám. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x^3 + y^3 = x^2y + xy^2 + p^{2009}$$

egyenletet!

Bencze Mihály (Brassó)

Megoldás:

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = p^{2009} \Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) = p^{2009}.$$

Ha $x - y = \pm p^k$, akkor $x + y = p^{2009-2k}$, azaz

$$\begin{cases} x = \dfrac{p^{2009-2k}+p^k}{2} \\ y = \dfrac{p^{2009-2k}-p^k}{2} \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} x = \dfrac{p^{2009-2k}-p^k}{2} \\ y = \dfrac{p^{2009-2k}+p^k}{2} \end{cases} \qquad k \in \{0,1,\dots,2009\}.$$

x, y egész, mivel $p^{2009-2k}$, p^k páratlan, így $2 / p^{2009-2k} \pm p^k$.

4. feladat. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+1} + \dfrac{1}{z+3} = \dfrac{9}{13} \end{cases}$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

Megoldás:

Az első egyenlet: $x + y + 1 + z + 3 = 13$ alakban írható.
A két egyenletet összeszorozva, a számtani és harmonikus középarányosok közötti egyenlőtlenség alapján:

$$9 = (x + y + 1 + z + 3)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+3}\right) \geq 9.$$

Egyenlőség csak egyenlő számok esetén lehet.

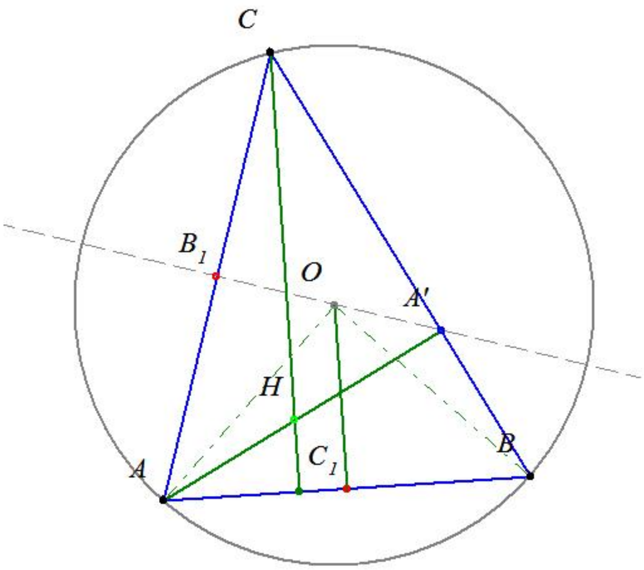
Következik: $x = y + 1 = z + 3 = \frac{13}{3}$.

Megoldás: $\left(\frac{13}{3}, \frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$, ami az egyetlen pozitív megoldás.

5. feladat. Jelölje H az ABC háromszög magasságpontját, O pedig a köré írt körének középpontját. Az A csúcsból a BC egyenesre bocsájtott merőleges talppontja rajta van az AC oldal felező merőlegesén. Határozzuk meg a $\frac{CH}{BO}$ arányt!

R. Sipos Elvira (Zenta)

Megoldás:



1. eset: Tegyük fel, hogy $\gamma < 90^\circ$. Legyen *A'* az *A* csúcs merőleges vetülete a *BC* oldalra, B_1 az *AC* oldal felezőpontja, C_1 pedig az *AB* oldal felezőpontja. A feladat feltételei alapján *AA'C* háromszög derékszögű, miközben *A'* illeszkedik az *AC* szakasz szimmetriatengelyére, vagyis egyenlőszárú is egyben. Tehát $BCA\angle=45°$. Ezért a neki megfelelő középponti szög $BOA\angle=90°$.

Az *AOB* háromszög derékszögű és egyenlő szárú (*AO*=*BO*=*R*: a körülírt kör sugara), vagyis $BOC_1\angle=45°$, azaz C_1O és *BO* az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója és átfogója, azaz $\sqrt{2}CO_1 = OB$.

2. eset: Ha $\gamma > 90^\circ$, akkor hasonlóan az előzőkhöz $\gamma = 135^\circ$, így is $BOA\angle = 90^\circ$, tehát $BOC_1\angle = 45^\circ$, így $BO = \sqrt{2}\cdot OC_1$ fennáll akkor is.

Ha *O*-ból a *CB* oldalra merőlegest bocsájtunk és a talppontját C_2-vel jelöljük, akkor a $C_1OC_2\triangle$ hasonló az $HCA\triangle$-höz, a hasonlósági arány 1:2, így $CH=2OC_1$, vagyis $\frac{CH}{BO} = 2\cdot\frac{C_1O}{BO} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Megjegyzés: Ha $\gamma = 90^\circ$, akkor *A'*=*C*, így az *AC* szimmetriatengelyén nem lehet rajta *A'*!

6. feladat. Legalább hány számot kell kihúznunk az 1, 2, 3, … , 2009 számok közül ahhoz, hogy a megmaradó számok egyike se legyen két másik, tőle különböző megmaradó szám szorzata?

Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás:

I.: A 2, 3, …, 44 számokat elegendő kihúzni.

$45 \cdot 46=2070$, ezért a megmaradók szorzata nem lehet a megmaradók között.

II.: 43-nál kevesebb szám nem elég.
Képezzük a következő 43 számhármast:

$$(2, 87, 2 \cdot 87), (3, 86, 3 \cdot 86), \ldots, (44, 45, 44 \cdot 45),$$

ahol 45, 46,…,87 a legkisebb 43 db egytől különböző megmaradó szám.
Ezek mind különböző számok, mert az első és második elemek növekvő, ill, csökkenő sorozatot alkotnak. A harmadik elemek is növekvő sorozatot adnak, mert $44<45$ és ha $x<y$ akkor

$$(x-1)(y+1) < xy$$
$$xy-y+x-1< xy$$
$$x< y+1$$

valóban igaz.

Ha csak 43-nál kevesebbet húzok ki, akkor valamelyik hármas együtt a megmaradók közt lesz, tehát lesz olyan 2 szám, melyek szorzata is a megmaradók közt lesz.

Tehát legalább 43 számot ki kell húzni.

<u>Megjegyzés:</u> 1,2,…,43 számokat kihúzva a $44 \cdot 45=1980$ miatt 44, 45, 1980 is a megmaradók közt lenne.

XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

11. osztály

1. feladat: Állítsuk öt párba az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat úgy, hogy a párokban lévő számok különbségeinek abszolút értékei rendre 1, 2, 3, 4, 5-t adjanak!

Megtehető-e ez a párosítás (természetesen hat párba), ha az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 számokkal dolgozunk, úgy hogy ezek a különbségek 1, 2, 3, 4, 5, 6 legyenek? Indokoljuk a választ!

Hajnal Péter (Szeged)

Megoldás: Az **első esetben a kért párosítás lehetséges**. Íme egy megoldás:

(2-1);(9-7);(6-3);(8-4);(10-5)

A második esetben úgy kell kialakítanunk a párokat, hogy a párokban szereplő számok különbségeinek abszolút értékei rendre 1,2,3,4,5,6 legyenek.
Legyen x_k a k-dik párban szereplő két szám közül a kisebb, így a másik szám $x_k + k$ lesz, ahol $k \in \{1;2;3;4;5;6\}$. A kapott párokban szereplő számokat összeadva $(2x_1+1)$, $(2x_2+2)$, $(2x_3+3)$, $(2x_4+4)$, $(2x_5+5)$, $(2x_6+6)$ számokat kapunk, melyeknek összege éppen 1+2+3+…+12 kell legyen. Ha X-el jelöljük a $\sum_{k=1}^{6} x_k$ összeget, akkor

$$\sum_{k=1}^{6}(2x_k+k) = 2\sum_{k=1}^{6}x_k + \sum_{k=1}^{6}k = 2X + \frac{6\cdot 7}{2}, \text{ innen}$$

$$2X + \frac{6\cdot 7}{2} = \frac{12\cdot 13}{2} \quad \Rightarrow \quad 2X + 21 = 78 \quad \Rightarrow \quad 2X = 57$$

A kapott egyenletnek nincs megoldása a természetes számok halmazán, tehát a **második esetben a kért párosítás nem lehetséges.**

2. feladat: Létezik-e két olyan egymástól különböző, pozitív racionális szám, amelyeknek számtani, mértani és harmonikus közepe egy derékszögű háromszög oldalhosszai?

Olosz Ferenc (Szatmárnémeti)

Megoldás: Legyen $a, b \in Q$ úgy, hogy $a > b > 0$. Az $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ egyenlőtlenségek alapján az átfogó hossza csak $\frac{a+b}{2}$ lehet.

Felírjuk a Pitagorasz tételt $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$,

majd a közös nevezőre hozás után, egyenértékű átalakításokkal rendre kapjuk, hogy

$$(a+b)^4 = 4ab(a+b)^2 + 16a^2b^2$$

$$\left(a+b\right)^2\left[\left(a+b\right)^2-4ab\right]=16a^2b^2$$

$$\left(a+b\right)^2\left(a-b\right)^2=16a^2b^2$$

$$\left(a^2-b^2\right)^2=16a^2b^2$$

ahonnan következik, hogy $a^2-b^2=4ab$ (mivel $a>b$).
Átrendezve az $a^2-4ab-b^2=0$ egyenlethez jutunk, melyet végigosztunk b^2-el (mert $b\neq 0$).

Az $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-4\left(\dfrac{a}{b}\right)-1=0$ egyenletet megoldva kapjuk hogy $\dfrac{a}{b}=2\pm\sqrt{5}$

Az $a>b>0$ feltétel alapján csak az $\dfrac{a}{b}=2+\sqrt{5}$ lehetséges.

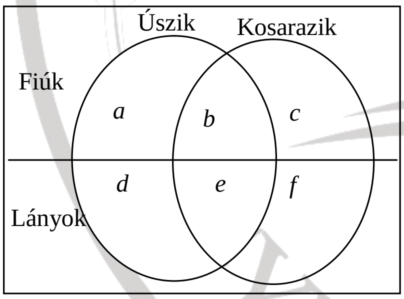
Az $\dfrac{a}{b}-2=\sqrt{5}\notin Q$ ellentmond annak a feltételnek, hogy $a,b\in Q$, azaz $\dfrac{a}{b}-2\in Q$.
Tehát nem létezik a feltételeknek megfelelő két különböző pozitív racionális szám.

3. feladat: Egy osztály minden tanulója vagy úszik, vagy kosarazik, esetleg mindkettőt csinálja.
Lehetséges-e, hogy az osztályban több a lány, mint a fiú a következő esetekben:

a) ha az úszóknak és a kosarasoknak is 60 %-a fiú?
b) ha az úszóknak 60 %-a és a kosarasoknak 75 %-a fiú ?

Katz Sándor (Bonyhád)

Megoldás: Az a kérdés, hogy lehetséges-e, hogy $d+e+f>a+b+c$.



a)

$a+b=0{,}6(a+b+d+e)$ és $c+b=0{,}6(c+b+f+e)$

$0{,}4a+0{,}4b=0{,}6d+0{,}6e$ és $0{,}4c+0{,}4b=0{,}6f+0{,}6e$

$d+e=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{2}{3}b$ (1) és $f+e=\dfrac{2}{3}c+\dfrac{2}{3}b$ (2)

Az (1) és (2) alapján: $d+2e+f=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{4}{3}b+\dfrac{2}{3}c$.

Innen

$$d+e+f=\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+\frac{2}{3}c-e=a+b+c-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}c-e$$

$$(d+e+f)-(a+b+c)=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}c-e$$

A kért egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{3}b-\dfrac{1}{3}c-e>0$, azaz $b>a+c-3e$.

Tehát úgy lehet a teljes létszám nagyobb része lány, hogy a fiúk (mindegyike vagy nagy része) mindkét sportot űzik, a lányok meg csak az egyiket.
Ha pl. $a=c=e=0$, akkor $2b=3d=3f$. Így, hogy „osztálynyian" legyenek $b=15$ és $d=f=10$. (De nem szükséges, hogy $a=c=e=0$ legyen, pl. $a=c=2$, $e=1, b=10$ és $d=f=7$ esetén még mindig több a lány (15), mint a fiú (14) az osztályban).
Összefoglalva, tehát ennél az aránynál **lehetséges**, hogy több a lány, mint a fiú.

b)

$$a+b=0{,}6(a+b+d+e) \quad \text{és} \quad c+b=0{,}75(c+b+f+e)$$

$$0{,}4a+0{,}4b=0{,}6d+0{,}6e \quad \text{és} \quad 0{,}25c+0{,}25b=0{,}75f+0{,}75e$$

$$d+e=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}b \quad (3) \quad \text{és} \quad f+e=\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}b \quad (4)$$

Az (3) és (4) alapján: $d+2e+f=\frac{2}{3}a+b+\frac{1}{3}c$.

Innen

$$d+e+f=\frac{2}{3}a+b+\frac{1}{3}c-e=a+b+c-\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}c-e$$

$$(d+e+f)-(a+b+c)=-\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}c-e$$

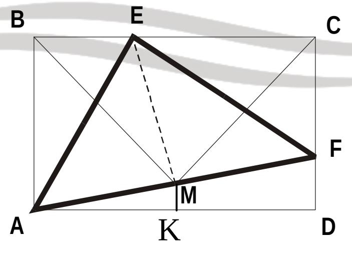
A kért egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}c-e>0$, azaz $0>a+2c+3e$, ami nyilván nem lehetséges.

Összefoglalva, tehát ennél az aránynál már **nem lehetséges**, hogy több a lány, mint a fiú.

4. feladat: Legyen *ABCD* egy olyan téglalap, amelybe szabályos háromszög írható úgy, hogy a háromszög egyik csúcsa az *A* pont, a másik kettő pedig a téglalap egy-egy olyan oldalán fekszik, amelyen az *A* pont nincs rajta. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a téglalapból a szabályos háromszög által lemetszett háromszögek egyikének a területe a két másik lemetszett háromszög területének összegével egyenlő!

Pintér Ferenc (Nagykanizsa)

I. Megoldás: Legyen $AB=a$ és $BC=b$, az *M* pont pedig az *AFE* szabályos háromszög *AF* oldalának felezőpontja.



Mivel $ABE\angle=90^\circ=AME\angle$, ezért a *B* és *M* pontok rajta vannak az *AE* szakasz Thalész-körén. De $MAE\angle=60^\circ$, ezért a kerületi szögek tétele miatt az $EBM\angle=60^\circ$.

Mivel $ECF\angle=90^\circ=FME\angle$, ezért a *C* és *M* pontok rajta vannak az *FE* szakasz Thalész-körén. De $MFE\angle=60^\circ$, ezért a kerületi szögek tétele miatt az $ECM\angle=60^\circ$.

Az $EBM\angle=60^\circ=ECM\angle$, tehát a *BMC* háromszög szabályos.

Ez azt jelenti, hogy az *M* pont a *BC* oldaltól $\frac{b\sqrt{3}}{2}$, míg az *AD* oldaltól $a-\frac{b\sqrt{3}}{2}$ távolságra van. Az *AFD* háromszögben *MK* középvonal, így $DF=2\left(a-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)=2a-b\sqrt{3}$.

Hasonló gondolatmenettel vagy az ABE és az AFD háromszögekben felírt Pitagorasz tétel segítségével belátható, hogy $BE = 2b - a\sqrt{3}$.

Következésképpen:

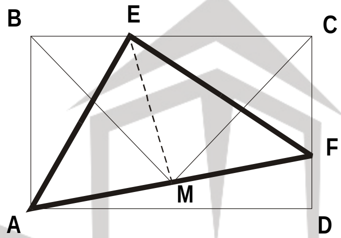
$$T_{ABE\Delta} = \frac{1}{2}a\left(2b - a\sqrt{3}\right) = ab - \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$T_{ADF\Delta} = \frac{1}{2}b\left(2a - b\sqrt{3}\right) = ab - \frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

$$T_{ECF\Delta} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{3} - b\right)\left(b\sqrt{3} - a\right) = 2ab - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{b^2\sqrt{3}}{2} = T_{ABE\Delta} + T_{ADF\Delta},$$

amit igazolni kellett.

II. Megoldás. Legyen $BAE\angle = \alpha$. Felhasználva, hogy az AFE szabályos háromszög ($AE = EF = AF = x$) következik, hogy $FAD\angle = 30^\circ - \alpha$, illetve $CEF\angle = 30^\circ + \alpha$.



Az ABE derékszögű háromszögben $AB = x\cos(\alpha)$ és $BE = x\sin(\alpha)$, tehát $T_{ABE\Delta} = \frac{1}{2}x^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(2\alpha)$ (ahol felhasználtuk, hogy $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$)

Az ADF derékszögű háromszögben $AD = x\cos(30^\circ - \alpha)$ és $FD = x\sin(30^\circ - \alpha)$, tehát $T_{ADF\Delta} = \frac{1}{2}x^2\sin(30^\circ - \alpha)\cos(30^\circ - \alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(60^\circ - 2\alpha)$.

Az ECF derékszögű háromszögben $CE = x\cos(30^\circ + \alpha)$ és $FC = x\sin(30^\circ + \alpha)$, tehát $T_{ECF\Delta} = \frac{1}{2}x^2\sin(30^\circ + \alpha)\cos(30^\circ + \alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(60^\circ + 2\alpha)$.

Felhasználva, hogy $\sin(p+q) - \sin(p-q) = 2\cos(p)\sin(q)$, következik, hogy

$$T_{ECF\Delta} - T_{ADF\Delta} = \frac{1}{4}x^2\sin(60^\circ + 2\alpha) - \frac{1}{4}x^2\sin(60^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{4}x^2\left[\sin(60^\circ + 2\alpha) - \sin(60^\circ - 2\alpha)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}x^2\,2\cos(60^\circ)\sin(2\alpha) = \frac{1}{4}x^2\,2\,\frac{1}{2}\sin(2\alpha) = \frac{1}{4}x^2\sin(2\alpha) = T_{ABE\Delta}$$

azaz $T_{ECF\Delta} = T_{ABE\Delta} + T_{ADF\Delta}$, amit igazolni kellett.

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a $3^k + 3^n$ alakban felírt négyzetszámokból végtelen sok van, ahol *k* és *n* különböző pozitív egész számok! Mi a helyzet, ha a 3 helyett a 4, az 5, a 6 és a 7 számokat írjuk?

Kántor Sándor (Debrecen)

Megoldás: Azt kell megvizsgálnunk, hogy az $a^m + a^k$ (ahol $m \neq k$ és $a, m, k \in N^+$) alakú számok a kért esetekben mikor lesznek négyzetszámok. Ha ugyanis egy $a^m + a^k$ alakú szám négyzetszám, akkor végtelen sok ilyen alakú négyzetszám van, mert minden *n* pozitív egész szám esetén $a^{m+2n} + a^{k+2n} = a^m \cdot a^{2n} + a^k \cdot a^{2n} = a^{2n}\left(a^m + a^k\right) = \left(a^n\right)^2\left(a^m + a^k\right)$.

Az $a = 3$ eset
Mivel $3^3 + 3^2 = 27 + 9 = 36 = 6^2$, ezért végtelen sok $3^m + 3^k$ alakú négyzetszám van.

Az $a = 4$ eset
Az általánosság leszűkítése nélkül feltételezhetjük, hogy $m > k$. Ekkor $4^m + 4^k = 4^k\left(4^{m-k} + 1\right) = \left(2^k\right)^2\left(4^{m-k} + 1\right)$, azaz azt kell megvizsgálnunk, mikor lesz a $4^{m-k} + 1$ teljes négyzet. Ha $4^{m-k} + 1 = c^2$, akkor $c^2 - 4^{m-k} = c^2 - \left(2^{m-k}\right)^2 = \left(c - 2^{m-k}\right)\left(c + 2^{m-k}\right) = 1$.
Felhasználva, hogy a *c* és a 2^{m-k} egész számok, innen a $2^{m-k} = 0$ következne, ami nem lehetséges. Tehát a 4 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

Az $a = 5$ eset
Az 5^n szám minden $n > 1$ esetben 25-re végződik, míg $5^1 = 5$. Ezek alapján az $5^m + 5^k$ szám vagy 30-ra vagy 50-re végződik. Viszont ha egy négyzetszám 10-el osztható, akkor 100-al is osztható, így nem végződhet sem 30-ra, sem 50-re. Tehát az 5 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

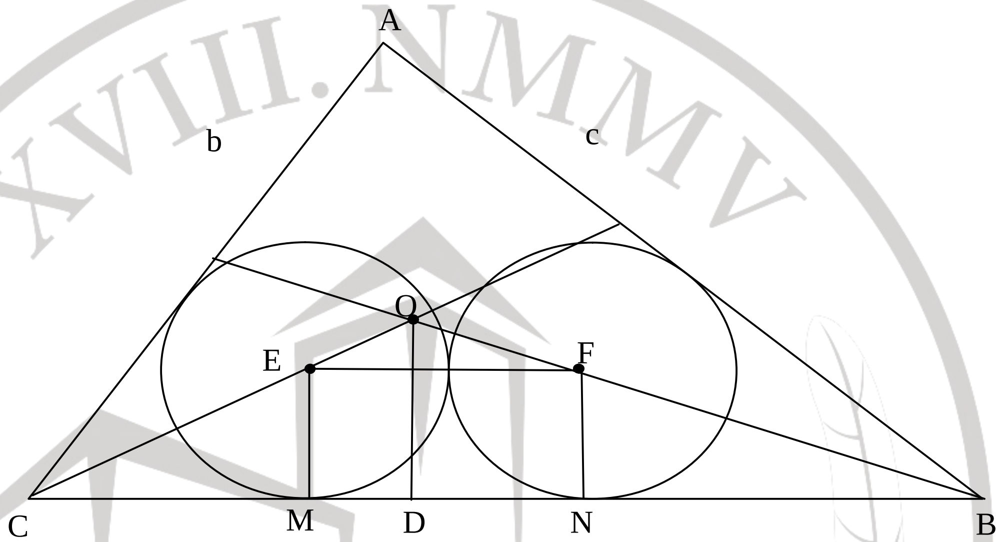
Az $a = 6$ eset
A 6-nak bármely pozitív egész hatványa 6-ra végződik. Így a $6^m + 6^k$ szám utolsó számjegye 2 lesz, de négyzetszám 2-re nem végződhet. Tehát a 6 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

Az $a = 7$ eset
A 7-nek 3-al való osztási maradéka 1, ezért a 7 minden pozitív egész kitevős hatványának a 3-mal való osztási maradéka szintén 1 (hiszen a $7^n = \left(2 \cdot 3 + 1\right)^n = 3M + 1$ alakú lesz). Így a $7^m + 7^k$ szám 3-al osztva 2-t ad maradékul.
Ha *c* egy természetes szám és 3-nak többszöröse, akkor c^2 is 3 többszöröse lesz, míg ha $c = 3n \pm 1$ alakú, akkor a négyzetének 3-al való osztási maradéka 1 lesz. Összegezve, egy négyzetszám hárommal osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat.
Tehát a 7 két különböző pozitív egész kitevős hatványának összege nem lehet négyzetszám.

6. feladat: Adott háromszögbe szerkesztettünk két egybevágó, közös belső pont nélküli, maximális sugarú kört. Mekkora ez a sugár? Hogyan történhet a szerkesztés?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

Megoldás: Legyen *ABC* az adott háromszög, melynek oldalai *a, b, c*. Nyilván mindkét kör érinti például az *a* oldalt és az egyik a *b*-t, a másik a *c*-t, valamint egymást is érintik. Az egyik kör középpontja a *B* csúcsból, a másiké a *C* csúcsból kiinduló belső szögfelezőn lesz. A körök középpontjai legyenek *E* és *F*, míg a szögfelezők metszéspontja (a háromszögbe írható kör középpontja) pedig *O*.



Legyen a háromszögbe írható kör sugara *r*, a keresett sugár pedig *x*. Ekkor az $EM = FN = x$, illetve az $EMN\angle = FNM\angle = 90^\circ$ összefüggések alapján következik, hogy az *EFNM* négyszög egy téglalap. Mivel $EF \parallel BC$, könnyen belátható a *BCO* és *FEO* háromszögek hasonlósága. Figyelembe véve, hogy $OD = r$, a két háromszög hasonlóságából felírható, hogy $\frac{r-x}{r} = \frac{2x}{a}$, ahonnan az $x = \frac{ar}{a+2r}$ lesz.

Ha *x* kifejezésében *a*-val egyszerűsítünk, azaz $x = \frac{r}{1+\frac{2r}{a}}$ lesz, akkor az látszik, hogy a nevező akkor a legkisebb, ha a mindkét kört érintő *a* oldal a három oldal közül a legnagyobb. Ekkor lesz az *x* sugár az adott háromszögben maximális.

Az *x* egy lehetséges megszerkesztése:

- adott *a, b, c* hosszúságú szakaszokkal megszerkesztjük az *ABC* háromszöget
- megszerkesztjük a háromszög két belső szögfelezőjét, így azok metszéspontjából megkapjuk a háromszögbe írható kör középpontját, illetve sugarát
- egy szög egyik szárára felmérjük az $a+2r$ és az *a* hosszúságú szakaszokat, a másik szárára pedig egy *r* hosszúságút, majd párhuzamos szelők segítségével megkapjuk az *x* hosszúságú szakaszt
- a *BC*-vel párhuzamost húzunk *x* távolságra, a párhuzamos és a belső szögfelezők metszéspontjai megadják a keresett középpontokat.

XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Gyula, 2009. március 12-16.

12. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy tetszőleges x valós számra teljesülnek a következő egyenlőtlenségek!

$$-\frac{5}{4} \le \sin x + \cos x + \sin 2x \le 1 + \sqrt{2}.$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

Megoldás: Legyen $T = \sin x + \cos x + \sin 2x$. Ekkor

$$T = \sin x + \cos x + \sin 2x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right) + \sin 2x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x.$$

Ebből az alakból nyilvánvaló, hogy $T \le \sqrt{2} + 1$.

$$T = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1 =$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Ebből az alakból nyilvánvaló, hogy $T \ge -5/4$.

Megjegyzés: Az alsó becslést a $T = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) - 1$ alakból is kihozhatjuk, ugyanis $\sin x + \cos x = a$ jelöléssel $T = a^2 + a - 1$, ami $T = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ alakra hozható.

2. feladat: 2009 számjegyei három „köz”-t határoznak meg: 2_0_0_9. A számon a következő átalakítást végezzük: kiválasztunk egy tetszőleges 10-es számrendszerbeli számjegyet, az első közbe beírjuk, a második közbe kétszer írjuk be, a harmadik közbe háromszor. Így egy következő számhoz jutunk. Ez persze hosszabb és így számjegyei több közt határoznak meg. Újból elvégezzük a fenti átalakítást: újból választunk egy számjegyet és a közökbe ezt írjuk (az i-edik közbe i darabot). Ezt az eljárást folytatjuk. Igazoljuk, hogy eljárásunk során soha sem kaphatunk 3-mal osztható számot.

Bíró Bálint (Eger)

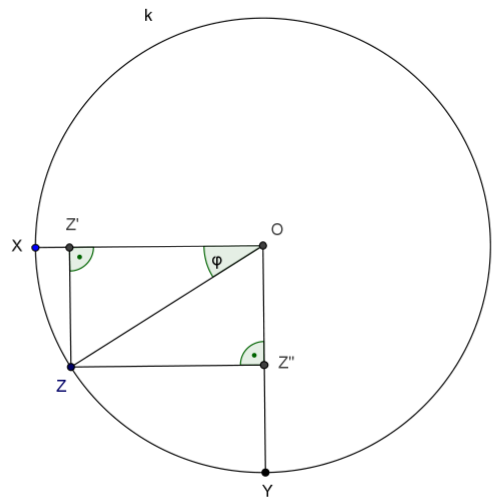
Megoldás: Ha egy $3\ell + 1$ jegyű számon végezzük el az átalakítást, akkor 3ℓ közbe írunk számjegyeket, összesen 1+2+3+…+ 3ℓ darabot. A beírt számjegyek száma 3-mal osztható, hiszen az ezt a számot megadó összeg ℓ darab három tagú összeg összege ((1+2+3)+(4+5+6)+…+(3ℓ-2+3ℓ-1+3ℓ)), amelyben minden tag három szomszédos egész összege, azaz hárommal osztható. (Természetesen a beírt számjegyek száma a számtani sorozat összegzési képlete alapján $(3\ell+1)3\ell/2$, amiből szintén könnyen látható a hárommal való oszthatóság.) Így az új szám számjegyeinek száma is 1 maradékot ad hárommal osztva. Sőt, ha a számjegyek összegét nézzük, akkor az új szám a régi számjegyeinek összegéhez képest hárommal osztható számmal növekszik (az új számjegyek ugyanazok). Így az új szám ugyanazt adja maradékul hárommal osztva, mint amiből képeztük.

A kiinduló szám négyjegyű ($4=3\cdot1+1$). Így a számjegyek száma végig $3\ell+1$ alakú szám lesz. A kiinduló szám $3s+2$ alakú. Így az átalakítások során végig olyan számot kapunk, ami hárommal osztva 2-t ad maradékul.

3. feladat: Jelölje *AC* és *BD* az egység sugarú kör két merőleges átmérőjét. Az *AB*, *BC*, *CD* és *DA* negyedköríveken felvesszük a *P*, *Q*, *R* és *T* pontokat úgy, hogy *APBQCRDT* egy konvex nyolcszög lesz. Hogyan válasszuk meg a *P*, *Q*, *R*, *T* pontokat ahhoz, hogy a kialakított nyolcszög oldalainak négyzetösszege minimális legyen?

Bíró Bálint (Eger)

I. Megoldás:



Elég *k* egy (*X* és *Y* pontok által közrefogott) negyedkör ívében megkeresni azokat a *Z* pontokat, amelyek az XZ^2+ZY^2 kifejezést minimalizálják. Ezen feladat megoldását az *AB*, *BC*, *CD* és *DA* negyedkörívekre alkalmazva meg tudjuk válaszolni a feladat kérdését is.

Jelöljük φ-vel a $ZOX\angle$-t. Legyen Z vetülete OX-re Z', OY-ra Z''. Ekkor $Z'O = ZZ'' = \cos\varphi$ és $Z''O = ZZ' = \sin\varphi$. Így adódik, hogy $XZ' = 1-\cos\varphi$ és $YZ'' = 1-\sin\varphi$. Az $XZ^2 + ZY^2$ négyzet összeg két Pitagorasz-tétel összegeként adódik:

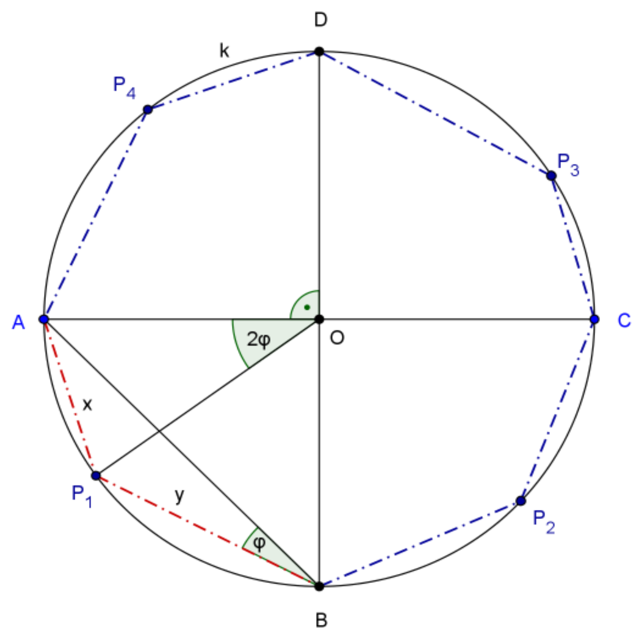
$$\begin{aligned}(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + (1-\sin\varphi)^2 &= \\ &= 1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+1-2\sin\varphi+\sin^2\varphi = \\ &= 4-2(\sin\varphi+\cos\varphi).\end{aligned}$$

Feladatunk $\sin\varphi+\cos\varphi$ maximalizálása, ahol $\varphi\in(0,\pi/2)$. Ez a kifejezés akkor lesz maximális, ha négyzete maximális, ami $\sin^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi+\cos^2\varphi=1+\sin 2\varphi$. Ez akkor lesz maximális, ha $\sin 2\varphi=1$, azaz $\varphi=\pi/4$, azaz *Z* az *XY* ív felezőpontja.

A negyedkörre vonatkozó optimalizálási kérdésre adott válaszból következik, hogy a négy ismeretlen csúcs választása akkor lesz optimális, ha szabályos nyolcszöget alakítanak ki (mindegyikük a megfelelő negyedkörív felezőpontja).

Megjegyzés: Hasonlóan járhatunk el úgy is, hogy az OXZ és az OYZ háromszögekben alkalmazzuk a koszinusz tételt (a megfelelő szögek φ, ill. $90^\circ - \varphi$). Ekkor szintén azonnal adódik, hogy a $\sin\varphi + \cos\varphi$ mennyiség maximumát kell meghatározni, ha $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

II. Megoldás: jelöléseink az ábrán láthatók. (Itt az egyes negyedkörökön felvett pontokat P_1, P_2, P_3 és P_4 jelöli.)



Mivel $OA = OC = R = 1$, ezért a Pitagorasz-tétel miatt $AC = \sqrt{2}$.
A P_1-et nem tartalmazó AC ívhez $270°$-os középponti szög tartozik, a kerületi és középponti szögek összefüggése miatt ezért $AP_1C\angle = 135°$. Ugyancsak a kerületi és középponti szögek összefüggéséből adódik, hogy ha $P_1CA\angle = \varphi$, akkor $P_1OA\angle = 2\varphi$, ahogy azt az ábrán is jelöltük.
Felírhatjuk az AP_1C háromszögre a koszinusztételt:

(1) $$x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 135° = AC^2.$$

Tudjuk, hogy $AC = \sqrt{2}$ és $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért (1)-ből következik, hogy

(2) $$x^2 + y^2 + \sqrt{2} \cdot xy = 2.$$

A (2) összefüggésből látható, hogy az x^2 és y^2 számok mindegyike kisebb 2-nél, erre az eredményre a megoldás során később lesz szükségünk.
Az OAP_1 háromszögre felírt koszinusztétel miatt $x^2 = 2 - 2 \cdot \cos 2\varphi$, amelyből

(3) $$\cos 2\varphi = \frac{2-x^2}{2}.$$

Egy trigonometriai azonosság szerint $\cos 2\varphi = 2\cdot\cos^2\varphi - 1$, azaz (3)-ból a műveletek elvégzése után

(4) $$\cos^2\varphi = \frac{4-x^2}{4}.$$

Az AP_1C háromszögre ismét felírjuk a koszinusztételt, de most másik oldalra.

Eszerint $x^2 = y^2 + 2 - 2\cdot y\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\varphi$, ebből $\cos\varphi = \dfrac{2+y^2-x^2}{2y\cdot\sqrt{2}}$, ebből pedig négyzetreemeléssel, egyszerűsítés után:

(5) $$\cos^2\varphi = \frac{x^4+y^4-4x^2+4y^2-2x^2y^2+4}{8y^2}.$$

A (4) és (5) egyenlőségéből $\dfrac{4-x^2}{4} = \dfrac{x^4+y^4-4x^2+4y^2-2x^2y^2+4}{8y^2}$, illetve a műveletek elvégzése és rendezés után $\left(2-x^2\right)^2 + \left(2-y^2\right)^2 = 4$, amelyből

(6) $$\sqrt{\frac{\left(2-x^2\right)^2+\left(2-y^2\right)^2}{2}} = \sqrt{2}$$

következik.

Mivel a fentiek szerint az x^2 és y^2 számok mindegyike kisebb 2-nél, ezért a (6) összefüggés bal oldalán éppen a $2-x^2$ és $2-y^2$ pozitív számok négyzetes közepe áll.

Erről tudjuk, hogy nagyobb, vagy egyenlő a kérdéses számok számtani közepénél, vagyis $\sqrt{2} \geq \dfrac{4-\left(x^2+y^2\right)}{2}$, amelyből

(7) $$x^2 + y^2 \geq 4 - 2\cdot\sqrt{2}.$$

A (7) eredmény azt jelenti, hogy az $AP_1CP_2BP_3DP_4$ nyolcszög P_1A és P_1C oldalai négyzetösszegének minimális értéke $4-2\cdot\sqrt{2}$, ezt a minimumot a $P_1A^2 + P_1C^2$ összeg akkor éri el, ha a négyzetes és a számtani közép tagjai egyenlők, azaz, ha $2-x^2 = 2-y^2$, vagyis, ha $PA_1 = x = y = PC_1$.

Ekkor P_1 éppen az AC negyedkörív felezőpontja.

Hasonlóképpen látható be, hogy a $P_2C^2 + P_2B^2$, $P_3B^2 + P_3D^2$ és $P_4D^2 + P_4A^2$ összegek mindegyikének minimális értéke is $4-2\cdot\sqrt{2}$, ez pedig azt jelenti, hogy az $AP_1CP_2BP_3DP_4$ nyolcszög oldalai négyzetösszegének minimális értéke $16-8\cdot\sqrt{2}$, ez akkor valósul meg, ha a $P_1; P_2; P_3$ és P_4 pontok a megfelelő negyedkörívek felezőpontjai.

4. feladat: Az a_1, a_2, a_3, a_4,…, a_{101}, a_{102} az 1, 2, 3, 4,…, 101, 102 számok egy tetszőleges sorbaállítása. Igazoljuk, hogy az a_1+1, a_2+2, a_3+3, a_4+4,…, a_{101}+101, a_{102}+102 számok közt lesz két olyan, amelyek 102-vel osztva azonos maradékot adnak!

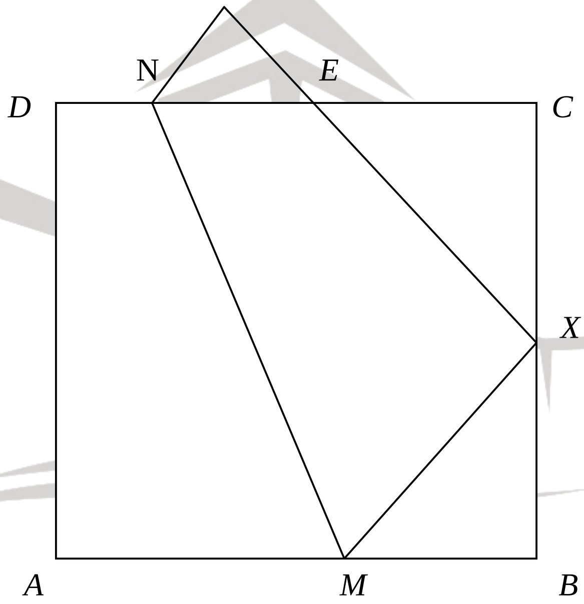
Balázsi Borbála (Beregszász)

Megoldás: Tegyük fel, hogy a_1, a_2,…, a_{102} ellenpélda az állításra. 102-vel osztva egy egész számot 102-féle maradékot kaphatunk. Ha a 102 darab a_i+i számunk közt nincs kettő ugyanazzal a maradékkal, akkor az csak úgy lehet, hogy mindegyik maradék pontosan egyszer fordul elő. Tehát az a_i+i számaink összege ugyanazt adja maradékul 102-vel osztva, mint 0+1+2+3+…+101=51·101. Számaink összege

$$(a_1+1)+(a_2+2)+\ldots+(a_{102}+102)=(a_1+a_2+\ldots+a_{102})+(1+2+\ldots+102)=$$
$$=2(1+2+\ldots+102)=102\cdot 103,$$

hiszen az a_i-k is 1-től 102-ig az egészek, csak esetleg más sorrendben. Tehát számaink összege osztható 102-vel, míg 0+1+2+…+101 nem. Ez ellentmondás, ami az állítást igazolja.

5. feladat: Egy *ABCD* négyzet alakú papír *A* csúcsát a *BC* oldal egy *X* belső pontjához mozgatjuk és a papírlapot behajtjuk. A behajtott *AD* oldal az ábrán látható módon a *C* csúcsnál levág egy *XEC* háromszöget. Hogyan válasszuk meg az *X* pontot ahhoz, hogy a levágott háromszög beírt körének sugara a lehető legnagyobb legyen?



Egyed László (Baja)

Megoldás: Az *A* csúcs az *X* pontba kerül. A hajtás egyenese az *AX* szakasz felező merőlegese. Erről könnyű látni, hogy az *AB* és *DC* oldalakat metszi. A metszéspontok legyenek rendre *M* és *N*. Legyen $XAB\angle=\alpha$.

Az *AMX* háromszög egyenlőszárú, alapon fekvő szögei α nagyságúak. Az $XMB\angle$ a háromszög egyik külső szöge, nagysága 2α. Az $EXC\angle$ és az $XMB\angle$ merőleges szárú szögek, így $EXC\angle=XMB\angle=2\alpha$. Legyen *O* az *EXC* háromszög beírt körének középpontja. A *CX* oldal a beírt kört érintse az *O*' pontban. Ekkor az *XOO*' háromszög egy derékszögű háromszög és *X*-nél lévő szöge $EXC\angle/2=\alpha$. Így hasonló az *ABX* háromszöghöz.

Legyen 1 a kiinduló négyzet oldala és az *XB* hosszát jelöljük *x*-szel. Így az *ABX* háromszög két befogója 1 és *x*. Ha az *EXC* háromszög beírt körének sugara *r*, akkor az *OXO*' háromszög befogói 1-*x*-*r* és *r*. A hasonlóság miatt *x*:1=*r*:1-*x*-r. Ebből *r* kifejezhető:

$$r=\frac{x-x^2}{1+x}=\frac{(2+x-x^2)-2}{1+x}=2-x-\frac{2}{1+x}=3-\left(1+x+\frac{2}{1+x}\right).$$

Ez a sugár akkor lesz a legnagyobb, amikor a 3-ból levont kifejezés a legkisebb. Ez a kifejezés egy összeg, amely tagjainak szorzata állandó. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből és abban az egyenlőség esetének analíziséből következik, hogy a levont kifejezés pontosan akkor a legkisebb, amikor $1+x=\frac{2}{1+x}$, azaz $1+x=\sqrt{2}$, $x=-1+\sqrt{2}$.

6. feladat: Egy n elemű halmaz három elemű részhalmazaiból kiválasztunk néhányat úgy, hogy semelyik három ne tartalmazzon egynél több közös elemet. Igazoljuk, hogy a kiválasztott hármasok száma nem haladhatja meg $\frac{n(n-1)}{3}$ -at!

Róka Sándor (Nyíregyháza)

Megoldás: Alaphalmazunk összes kételemű részhalmazára írjuk fel a kiválasztott elemhármasok közül azokat, amelyek a két elemű halmazt tartalmazzák.

Feltételeink szerint egy kételemű halmaz esetén se írhattunk fel három vagy több kiválasztott elem-hármast, azaz az $\binom{n}{2}$ elempár mindegyike legfeljebb 2 elem-hármast ad a listára. Így listánk legfeljebb $\binom{n}{2}\cdot 2$ hosszú lesz.

Másrészt minden kiválasztott három-elemű részhalmaz háromszor szerepel a listán, a három két elemű részhalmaza miatt.

A kétféle gondolatmenet összevetéséből kapjuk, hogy a kiválasztott részhalmazok száma legfeljebb

$$\frac{\binom{n}{2}\cdot 2}{3}=\frac{n(n-1)}{3}.$$